NOMBRES RELATIFS EN ECRITURE FRACTIONNAIRE ET OPERATIONS

Nous avons vu que le quotient de deux nombres relatifs n'est pas toujours décimal et donc cela nous conduit à la définition suivante :

I. Nombres relatifs en écriture fractionnaire :

1) Ecriture fractionnaire :

Définition :

Lorsque le quotient de a par b n'est pas un nombre décimal, l'écriture fractionnaire $\frac{a}{b}$ désigne la valeur exacte de ce quotient.

2) Propriété des quotients égaux :

Propriété :

Un quotient ne change pas quand on multiplie (ou quand on divise) son numérateur et son dénominateur par un même nombre relatif non nul.

Autrement dit,

Si a, b et c sont des nombres quelconques avec $b \neq 0$ et $c \neq 0$ alors :

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times c}{b \times c} \qquad\qquad \frac{a}{b} = \frac{a \div c}{b \div c}$$

Preuve :

Le but est de montrer que $\frac{a}{b} = \frac{a \times c}{b \times c}$

Soient a, b et c des nombres relatifs *(avec b et c non nuls)*

Par définition, $\frac{ac}{bc}$ est le nombre q tel que $bc \times q = ac$

Or, $bc \times \frac{a}{b} = b \times c \times \frac{a}{b} = c \times a = ac$

Donc le nombre q recherché est $\frac{a}{b}$ *(Ce qui prouve l'égalité)*

Remarque :

- Cette propriété permet de simplifier l'écriture d'un quotient en divisant le numérateur et le dénominateur par le même nombre.
- Elle permet aussi d'écrire deux quotients avec le même dénominateur.

Exemples :

- Simplifier la fraction suivante :

$$\frac{90}{36} = \frac{90 \div 2}{36 \div 2} = \frac{45}{18} = \frac{45 \div 9}{18 \div 9} = \frac{5}{2}$$

- Transformer le quotient suivant en fraction égale :

$$\frac{3}{4{,}5} = \frac{3 \times 2}{4{,}5 \times 2} = \frac{6}{9}$$

- Mettre ces deux quotients au même dénominateur :

$$\frac{5}{2} = \frac{5 \times 7}{2 \times 7} = \frac{35}{14} \qquad\qquad \frac{-11}{7} = \frac{-11 \times 2}{7 \times 2} = \frac{-22}{14}$$

3) Propriété des produits en croix égaux :

Propriété :

Soient a, b, c et d sont des nombres relatifs avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$

- Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, alors $a \times d = b \times c$
- Si $a \times d = b \times c$ alors $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Preuve :

- Soient a, b, c et d des nombres relatifs avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors le tableau ci-contre est un tableau de proportionnalité

a	c
b	d

Ainsi, si l'on désigne par k le coefficient de proportionnalité alors $b \times k = a$ et $d \times k = c$
Et alors, on a bien $a \times d = bk \times d = b \times dk = b \times c$.
Donc le nombre q recherché est $\frac{a}{b}$ *(Ce qui prouve l'égalité)*

- Soient a, b, c et d des nombres relatifs tels que $a \times d = b \times c$ avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$

On a alors $\frac{a}{b} = \frac{a \times d}{b \times d}$ *(D'après la propriété des quotients égaux)*
Et donc, $\frac{a}{b} = \frac{b \times c}{b \times d}$ *(D'après l'hypothèse de départ)*
Ce qui implique nécessairement $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ *(D'après la propriété des quotients égaux)*

II. Opérations sur les nombres relatifs en écriture fractionnaire :

1) Additions et soustractions :

Propriété :

Pour additionner *(ou soustraire)* des nombres en écriture fractionnaire :
- On écrit les nombres avec le même dénominateur
- On additionne *(ou on soustrait)* les numérateurs et on garde le dénominateur commun

Autrement dit,

Si a, b et c sont des nombres quelconques avec $c \neq 0$ alors :

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \qquad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$$

Preuve :

Preuve : $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$

Soient a, b et c des nombres relatifs (avec c non nul)

Par définition, $\frac{a}{c}$ est le nombre q_1 tel que $q_1 \times c = a$ et $\frac{b}{c}$ est le nombre q_2 tel que $q_2 \times c = b$

Egalité n°1

Egalité n°2

D'autre part, comme $\frac{a+b}{c}$ est le nombre q tel que $q \times c = a + b$
Et que $(q_1 + q_2) \times c = q_1 \times c + q_2 \times c = a + b$

D'après la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition

D'après les deux égalités précédentes

Donc le nombre q recherché est $\frac{a}{c} + \frac{b}{c}$ (Ce qui prouve l'égalité)

Preuve :

Preuve : $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$

Même type de raisonnement.

Exemples :

Effectuer le calcul suivant $\frac{-2}{3} + \frac{3}{2}$

- *Mise au même dénominateur :*

$\frac{-2}{3} = \frac{-2 \times 2}{3 \times 2} = \frac{-4}{6}$

$\frac{3}{2} = \frac{3 \times 3}{2 \times 3} = \frac{9}{6}$

- *Calcul :*

$\frac{-2}{3} + \frac{3}{2} = \frac{-4}{6} + \frac{9}{6} = \frac{-4+9}{6} = \frac{5}{6}$

2) Multiplications :

Propriété :

Pour multiplier des nombres en écriture fractionnaire, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

Autrement dit,

Si a, b, c et d sont des nombres relatifs quelconques avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$ alors :

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

Preuve :

Preuve : $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$

Soient a, b, c et d des nombres relatifs (avec b et d non nuls)

Par définition, $\frac{a}{b}$ est le nombre q_1 tel que $q_1 \times b = a$ et $\frac{c}{d}$ est le nombre q_2 tel que $q_2 \times d = c$

Egalité n°1

Egalité n°2

D'autre part, comme $\frac{ac}{bd}$ est le nombre q tel que $q \times bd = ac$

Et que $(q_1 \times q_2) \times bd = q_1 \times b \times q_2 \times d = a \times c$

Car on peut modifier l'ordre des facteurs dans une multiplication

D'après les deux égalités précédentes

Donc le nombre q recherché est $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$ (Ce qui prouve l'égalité)

Exemples :

- Effectuer le calcul suivant $\frac{-2}{3} \times \frac{4}{-7}$:

$$\frac{-2}{3} \times \frac{4}{-7} = \frac{-2 \times 4}{3 \times (-7)} = \frac{-8}{-21} = \frac{8}{21}$$

- Effectuer le calcul suivant $\frac{4}{15} \times \frac{-35}{8}$:

$$\frac{4}{15} \times \frac{-35}{8} = \frac{4 \times (-35)}{15 \times 8} = \frac{4 \times 5 \times (-7)}{5 \times 3 \times 4 \times 2} = \frac{-7}{3 \times 2} = -\frac{7}{6}$$

3) Inverse d'un nombre relatif non nul :

Définition :

L'inverse d'un nombre relatif dont l'écriture fractionnaire est $\frac{a}{b}$ ($a$et b non nuls) est $\frac{b}{a}$.

En effet, $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1$

Exemple :

- L'inverse de -8 est égal à $-\frac{1}{8}$.
- L'inverse de $-\frac{2}{3}$ est égal à $-\frac{3}{2}$.

4) Divisions :

Propriété :

Diviser par un nombre relatif non nul revient à multiplier par son inverse.

$$a \div b = a \times \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$$

avec $b \neq 0$

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

avec $b \neq 0$; $c \neq 0$ et $d \neq 0$

Exemples :

- $\frac{5}{3} \div \frac{10}{7} = \frac{5}{3} \times \frac{7}{10} = \frac{5 \times 7}{3 \times 5 \times 2} = \frac{7}{6}$
- $\frac{6}{7} \div (-3) = \frac{6}{7} \times \frac{1}{(-3)} = \frac{6 \times 1}{7 \times (-3)} = \frac{3 \times 2}{7 \times 3 \times (-1)} = -\frac{2}{7}$